鞍形膜结构在冲击载荷作用下的振动特性

谢海兵[1],刘长江[2],王梦斐[1],刘坚[2],郑周练[3],姜苏[1]

(1. 成都理工大学环境与土木工程学院,610059 成都;2. 广州大学土木工程学院,510006 广州;3. 重庆大学土木工程学院,400044 重庆)

摘　要:以鞍形膜结构为研究对象,研究了冲击载荷作用下鞍形膜结构的振动问题。首先推导了冲击载荷作用下的结构振动非线性微分方程,该方程中考虑了膜材的正交异性,空气阻尼以及膜材变形的几何非线性。然后假设一小球以某确定的冲击速度差冲击膜面,模拟冲击荷载。最后利用随机摄动法求解方程,得到鞍形膜结构振动响应的位移函数,通过该函数分别对膜面预张力、拱跨比以及小球速度差进行参数分析。同时,对鞍形膜结构的振动进行数值模拟,并与解析理论作对比分析。结果表明鞍形膜结构振动位移会随着膜面预张力或拱跨比的增大而减小,同时也会随着速度差的增大而增大。由此可知该理论模型研究鞍形膜结构在冲击载荷作用下的振动特性是可行的,得到的结果能够准确地预测膜结构响应规律。

关键词:非线性振动;随机摄动法;鞍形膜结构;冲击载荷;数值模拟

中图分类号:TU313　　**文献标志码:**A

Vibration characteristics of saddle membrane structure under impact load

XIE Haibing[1],LIU Changjiang[2],WANG Mengfei[1],LIU Jian[2],ZHENG Zhoulian[3],JIANG Su[1]

(1. School of Environmental and Civil Engineering,Chengdu University of Technology,610059 Chengdu,China;
2. College of Civil Engineering,Guangzhou University,510006 Guangzhou,China;
3. College of Civil Engineering,Chongqing University,400044 Chongqing,China)

Abstract: Taking the saddle membrane structure as the research object,the vibration of the saddle membrane structure under the impact load is studied. First,the nonlinear differential equation of structural vibration under impact load is derived,in which the orthotropic of membrane material,air damping,and geometric nonlinearity of membrane deformation are considered. Then,it is assumed that a small ball impacts the membrane surface with a certain impact velocity difference to simulate the impact load. Finally,the stochastic perturbation method is used to solve the equation,and the displacement function of the vibration response of the saddle membrane structure is obtained. At the same time,the vibration of the saddle membrane structure is numerically simulated and compared with the analytical theory. The results show that the vibration displacement of saddle membrane structure decreases with the increase of membrane pretension

收稿日期:2022-04-15　　**修回日期:**2022-10-25
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 51608060);广东省基础与应用基础研究基金资助项目(No. 2019A1515011063);广州市科技计划资助项目(No. 202102010455)
通信作者:刘长江,副教授。E-mail:cjliu@gzhu.edu.cn
引用格式:谢海兵,刘长江,王梦斐,等. 鞍形膜结构在冲击载荷作用下的振动特性[J]. 应用力学学报,2023,40(1):162-170.
XIE Haibing,LIU Changjiang,WANG Mengfei,et al. Vibration characteristics of saddle membrane structure under impact load[J]. Chinese journal of applied mechanics,2023,40(1):162-170.

or arch span ratio, and increases with the increase of velocity difference. It can be seen that the theoretical model is feasible in studying the vibration characteristics of saddle membrane structure under impact load, and the results can accurately predict the response law of membrane structure.

Key words: nonlinear vibration; random perturbation method; saddle membrane; impact load; numerical simulation

膜材由于其质量轻、柔韧性好,现被广泛应用于大跨度空间建筑结构当中,并且工程师也常用正交各向异性织物膜材设计成空间曲面形状(伞形和鞍形)的屋顶或穹顶结构。因为刚度低、质量小的特点,膜结构在受到外界风雨、冰雹和风卷产物等荷载作用时,会十分敏感,易产生较大的振动变形,甚至结构失效。而实际环境中膜结构受风荷载作用更为广泛,且当今比较典型膜结构工程事故中,有多起是受风荷载作用引起的,因此许多学者对风荷载问题进行了较为广泛的研究。而膜结构的冲击问题就相对显得不那么突出,相关的研究也较少,但是膜结构工程的设计、施工与维护,仅考虑风荷载作用是不全面、不合理的,如较大的冰雹冲击会使膜结构产生较大的振动变形以及应力松弛[1]。因此,为了充分考虑各种荷载效应组合,保证膜结构工程的可靠性,研究膜材在冲击载荷作用下的振动问题是十分必要的。

目前,膜结构相关问题的研究较为广泛,包括各种形状模型的研究,以及确定性的与非确定性的力学研究等。张华等[2]使用动力松弛法对薄膜结构进行静载分析,提出一种方法处理皱折单元以确保荷载分析的可靠性。LIU 等[3-4]考虑了薄膜几何非线性,研究了正交各向异性膜薄膜阻尼作用以及冲击载荷作用等问题,得到了薄膜振动频率、振型以及位移解析,为平面膜结构设计、膜面预张力测量问题提供了理论依据。ZHENG 等[5]通过试验得到了冲击载荷试验的统计特性,通过随机振动理论研究了膜材的随机振动问题,得到了振动位移响应均值函数的计算方法,为随机振动问题的进一步研究奠定了基础。LI 等[6-7]基于随机脉冲理论,获得了随机脉冲风荷载特性,研究了正交各向异性平面膜在随机脉冲风作用下的随机振动问题,为随机振动控制和随机动载荷作用下膜结构的设计提供了理论框架。郭学敏等[8]针对工程中电子器件的膜结构热应力与热应变会严重影响器件结构与功能的问题进行了研究,解决了困扰有限元分析的奇异点问题,结果对恶劣工作环境下电子器件的薄膜设计具有一定的借鉴意义,为膜结构热力学研究提供了参考。对空间曲面模型的膜结构,由于微分控制方程中曲率的影响,大大增加了数学上的复杂性,很难求得曲面膜振动问题的精确解析解。因此,多采用近似方法求解近似的解析解,或采用试验和数值模拟方法进研究。如 XU 等[9]、LIU 等[10]通过建立基于冯·卡门大挠度理论和达朗贝尔原理的风振耦合控制方程,研究了正交各向异性鞍形膜结构的非线性风振气动稳定性。通过判断系统特征方程的稳定性,确定了发散失稳临界风速。孙芳锦等[11]研究了风与柔性结构流固耦合作用的强耦合整体方程,采用预处理方法对经典二维与三维流固耦合问题进行了计算分析,结果表明该方法可使强耦合整体方程的求解在计算精度和效率上得到较大提升,证明该方法适用于风与柔性结构的流固耦合分析,为风与膜结构的耦合作用研究提供了方法。

综上,作为膜结构常用形式之一的鞍形膜结构,其冲击问题还鲜见相关报道。因此,本研究以鞍形膜结构为研究对象,利用求解各种非线性微分方程的强有力方法——随机摄动法,求解得到其在冲击载荷作用下的振动理论解析,通过该解析得到鞍形膜结构的响应位移函数,并分析膜结构相关参数对鞍形膜结构的动力响应的影响规律,通过 Ansys/Ls-Dyna 有限元软件进行数值模拟,与理论作对比分析。最终对比结果表明理论解析和数值结果吻合较好,能够准确地预测鞍形膜结构在冲击载荷作用下的振动特性,得到冲击荷载作用下的膜结构响应规律,通过该规律可为确定膜结构相关参数的设计(如拱跨比选择、预张力确定与测量)和膜结构施工与维护提供参考,也为鞍形膜结构的随机振动与可靠度分析提供理论基础。

1　边界条件与控制方程

假设鞍形膜结构的四条边为简支支承。以膜表面的一个角点 o 为原点建立空间直角坐标系,x、y 方向尺寸分别为 a、b;x、y 方向预张力分别为 N_{0x} 和

N_{0y}；A 点为膜面中心点，B、C、D 点分别膜面各位置测点；f_x、f_y分别是结构 x、y 方向的跨中拱；假设一小球 H 以初速度 v_0 冲击膜面中心点 A，后以速度 v_0'再反射出膜面，如图 1 所示。

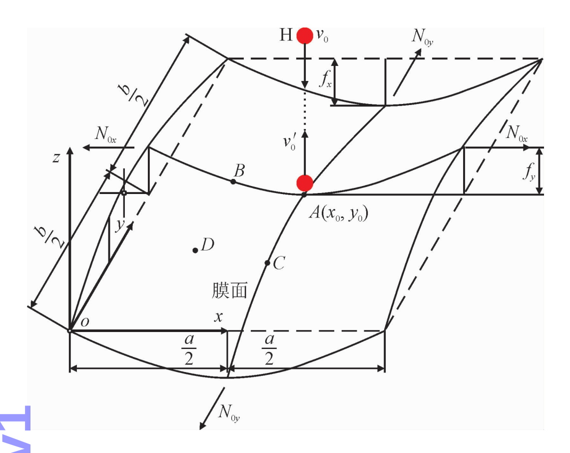


图 1　四边简支正交异性鞍形膜结构模型

Fig. 1　Quadrilateral simply supported orthotropic saddle membrane structure model

鞍形膜结构的初始表面函数可以表示为[9-10]

$$z_0(x,y) = \frac{f_y\,(x-(a/2))^2}{(a/2)^2} - \frac{f_x\,(y-(b/2))^2}{(b/2)^2} \tag{1}$$

鞍形膜结构的四边为简支支承，根据扁壳、薄壳无矩理论，则其相应的位移边界条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,y,t) = w(0,y,t) = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(a,y,t) \\ \qquad = w(a,y,t) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,0,t) = w(x,0,t) = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,b,t) \\ \qquad = w(x,b,t) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

应力边界条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0,y,t) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(a,y,t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,0,t) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(y,b,t) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

其中：$w(x,y,t)$为横向冲击产生的位移响应；$\varphi(x,y,t)$为薄膜应力函数；t 为任意时间。

鞍形膜结构在冲击荷载作用下的偏微分控制方程根据参考文献[9-10]，得到

$$-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}h + N_{0x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}h + N_{0y}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - K_{0x}h\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - K_{0y}h\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + C\frac{\partial w}{\partial t} = P(x,y,t) \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - K_{0x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - K_{0y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{E_x}\cdot\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} + \frac{1}{E_y}\cdot\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} \tag{5}$$

式中：h 为膜材厚度；C 为阻尼系数；ρ 为膜材面密度；E_x和 E_y分别为 x 和 y 向弹性模量；K_{0x}和 K_{0y}分别为 x 和 y 向的曲率。

假设在一定时间 t 和一定位置(x_0,y_0)对膜面施加一个振幅为 A 的冲击载荷，表示为[12]

$$P(x,y,t) = A\delta(t)\delta(x-x_0,y-y_0) \tag{6}$$

式中：δ 为狄拉克脉冲函数；A 为冲击荷载幅值。

2　求解非线性微分方程

根据板壳振动理论，假设满足位移边界条件式(2)的位移函数为

$$\begin{aligned} w(x,y,t) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\cdot T_{mn}(t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x,y)T_{mn}(t) \end{aligned} \tag{7}$$

式中：$W_{mn}(x,y)$为振型函数；$T_{mn}(t)$为未知函数；m 和 n 为整数，分别表示 x 和 y 方向上的正弦半波数。

将式(7)代入相容方程式(5)，再结合边界条件式(3)，可以得到应力函数为

$$\begin{aligned} \varphi(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{ & T^2(t)\Big[\frac{a^2n^2E_y}{32b^2m^2}\cos\left(\frac{2m\pi x}{a}\right) + \\ & \frac{b^2m^2E_x}{32a^2n^2}\cos\left(\frac{2n\pi x}{b}\right) + \frac{n^2\pi^2E_y}{16b^2}x^2 + \frac{m^2\pi^2E_x}{16a^2}y^2\Big] + \\ & \frac{a^2b^2E_xE_y(a^2n^2K_{0x} + b^2m^2K_{0y})}{\pi^2(b^4m^4E_x + a^4n^4E_y)}\cdot \\ & \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)T(t)\Big\} \end{aligned} \tag{8}$$

将式(7)～(8)代入弹性曲面微分方程式(4)，式中 $T(t)$用 T 表示，则运用伽辽金法解耦可得

$$\iint_s \begin{Bmatrix} -\left(N_{0y}\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2} + N_{0x}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + K_{0x}h\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + K_{0y}h\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\right)T - \\ h\left(K_{0x}\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + K_{0y}\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)T^2 - \\ h\left(\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)T^3 + \rho WT'' + CWT' - \\ A\delta(t)\delta(x-x_0,y-y_0) \end{Bmatrix} W(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

上式引入小参数 $\varepsilon = h^2/ab$ 并化简为非线性振动微分方程得

$$T'' + 2\beta T' + \omega_0^2(T + \varepsilon\alpha_1 T^2 + \varepsilon^2\alpha_2 T^3) = X(t) \tag{9}$$

式中

$$\beta = \frac{\iint_s C W^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{2\iint_s \rho W^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}, \quad \omega_0^2 = -\frac{\iint_s N_{0y}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + N_{0x}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + K_{0x}h\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + K_{0y}h\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_s \rho W^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y},$$

$$\alpha_1 = \frac{\iint_s -h\left(K_{0x}\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + K_{0y}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_s \rho W^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}\cdot\frac{ab}{h^2}\cdot\frac{\iint_s \rho W^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_s N_{0y}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + N_{0x}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + K_{0x}h\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + K_{0y}h\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y},$$

$$\alpha_2 = \frac{\iint_s -h\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)W\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_s \rho h W^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}\cdot\frac{a^2b^2}{h^4}\cdot\frac{\iint_s \rho W^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_s N_{0y}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + N_{0x}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + K_{0x}h\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + K_{0y}h\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y},$$

$$X(t) = \frac{\iint_s A\delta(t)\delta(x - x_0, y - y_0)W\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_s \rho W^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{4A\delta(t)}{\rho ab}\sin\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right)$$

2.1 随机摄动法求解

式(9)是关于 $T(t)$ 的非线性振动微分方程,本研究利用随机振动理论中的随机摄动法进行求解。由于膜的厚度远远比边长小,即 $\varepsilon = h^2/ab \ll 1$,所以将 $T(t)$ 展开成关于小参数 ε 的幂级数,得到

$$T(t) = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + 0(\varepsilon^2) \tag{10}$$

将式(10)代入式(9),并令 ε 的同次幂各项系数等于零,可以得到一组线性微分方程,即

$$\begin{cases} T_0'' + 2\beta T_0' + \omega_0^2 T_0 = X(t) \\ T_1'' + 2\beta T_1' + \omega_0^2 T_1 = -\alpha_1\omega_0^2 T_0^2 \\ T_2'' + 2\beta T_2' + \omega_0^2 T_2 = -2\alpha_1\omega_0^2 T_0 T_1 - \alpha_2\omega_0^2 T_0^3 \\ \quad\vdots \end{cases} \tag{11}$$

由式(11)可知,$T(t)$ 的每一个展开式都满足一个输入的线性微分方程。根据平稳随机过程理论,可以对其进行杜哈梅积分[13]求解,即

$$T_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)X(t - s)\mathrm{d}s,$$

$$T_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)g_1(t - s)\mathrm{d}s,$$

$$T_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)g_2(t - s)\mathrm{d}s \tag{12}$$

式中:$h(s)$ 为脉冲响应函数;$g_1(t) = -\alpha_1\omega_0^2 T_0^2$;$g_2 = -2\alpha_1\omega_0^2 T_0 T_1 - \alpha_2\omega_0^2 T_0^3$。

式(10)中 $X(t)$ 没有限定必须是随机过程中的一个样本,因此可以是一种确定性非线性振动问题。

当小球撞击膜表面时,膜表面与球之间的碰撞是一对作用力和反作用力。假设球的入射速度为 v_0,反射速度为 v_0'。根据 D'Alembert's 定理,可以确定膜表面的冲击力为

$$\int_0^{t_1} A\delta(\tau)\mathrm{d}\tau = Mv_0 - Mv_0' \to A = M\delta(v) \tag{13}$$

由式(9)可得到作用于鞍形膜的冲击载荷过程函数为

$$X(t) = \frac{4M\delta(v)}{\rho ab}\sin\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right)\delta(t) \tag{14}$$

根据文献[5],由式(11)推导脉冲响应函数 $h(s)$ 为

$$h(t) = \frac{e^{-\beta t}}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}\sin(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t) \tag{15}$$

2.2 位移响应函数

关于 $T(t)$ 的非线性振动微分方程,随着 ε 的阶数越大运算越复杂,实践中常只计算到 ε 的一次幂,而高次摄动也只能改善小 ε 的近似程度,对于大 ε 时高次摄动可能使近似程度变坏[14]。因此将式(14)~(15)代入式(12)的第一个积分项可得

$$T_0 = \frac{4Me^{-\beta t}\cdot\delta(v)}{\rho ab\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}\cdot\sin\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right)\cdot\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t\right) \tag{16}$$

再将式(16)、(12)中的 $g_1(t)$ 代入式(12)的第二个积分项可得

$$T_1 = \frac{-16\alpha_1\omega_0^2M^2\delta^2(v)\cdot\sin^2\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right)\sin^2\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right)}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,(\rho ab)^2(\omega_0^2-\beta^2)}\cdot\left\{\frac{\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t\right)(-e^{-\beta t}-e^{-2\beta t})}{3\beta^2-4\beta\omega_0^2}+(\beta^2e^{-2\beta t}-\beta^2e^{-\beta t}+\omega_0^2e^{-\beta t}-\omega_0^2e^{-2\beta t})\cdot\frac{2\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t\right)}{3\beta^2-4\beta\omega_0^2}\right\} \tag{17}$$

将式(10)、(16)、(17)代入式(7),可得到鞍形膜结构在膜表面任意点处位移的近似解为

$$w(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)(T_0+\varepsilon\cdot T_1) \tag{18}$$

将鞍形膜结构的初始表面函数式(1)与式(18)进行叠加,可以得到冲击荷载作用下鞍形膜结构的曲面函数。

$$S = w(x,y,t)+\frac{f_y\,(x-(a/2))^2}{(a/2)^2}-\frac{f_x\,(y-(b/2))^2}{(b/2)^2} \tag{19}$$

式(18)~(19)中 $\delta(v)$ 是小球冲击膜面过程的速度差。取确定性的速度差 $\delta(v)$ 输入,可以得到确定性的动态响应输出。

3 算例分析

以工程中常用膜材为例,具体参数取:$a=b=1$ m,$E_x=1\ 400$ MPa,$E_y=900$ MPa,$\rho=1.7$ kg/m^2,$h=0.001$ m,阻尼 $C=120$ N·s/m。下面来分析鞍形膜在确定性的冲击载荷作用下的振动特性。

3.1 位移时程曲线

取拱跨比 $f_x=f_y=0.1$,预张力 $N_{0x}=N_{0y}=10$ kN/m。由式(2)可得,$K_{0x}=0.8$ m^{-1},$K_{0y}=-0.8$ m^{-1}。假设质量为 $M=25\times10^{-3}$ kg 的小球冲击膜面中心点 A。根据式(18),冲击点 A 的前三阶位移以及前三阶位移叠加时程曲线如图 2 所示。

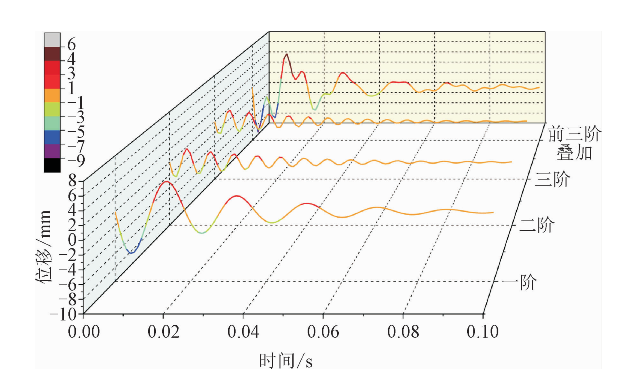


图 2 冲击点 A 前三阶位移时程曲线

Fig. 2 The first three-order displacement time-history curve of impact point A

从图 2 可以得出以下结论。

1)最大位移随着振动阶数的增加而逐渐减小;而振动周期也随着振动阶数的增加而减小。

2)随着时间的增加,由于阻尼的存在,单阶振幅逐渐减小,直至为零。

3)总位移振动波形更接近实际的不规则性,同时呈现出各阶振动波形周期、振幅、衰减等特点。且当小球冲击膜面后,A 点做有阻尼自由振动。

同时对膜面另外 3 个测点 B、C、D 分别进行了前 3 阶模态叠加,得到总位移的时程曲线,并与 A 点作比较,如图 3 所示。

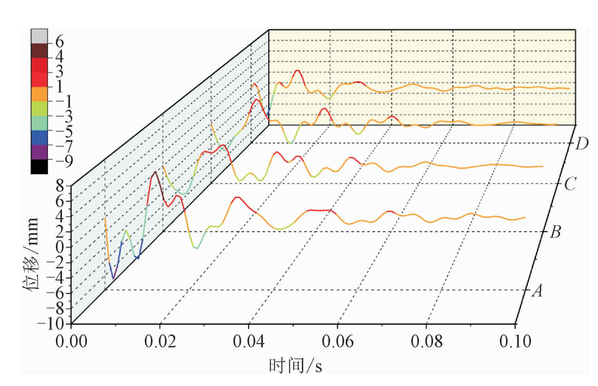


图 3 各测点前三阶位移时程曲线

Fig. 3 The first three-order displacement time-history curve of each measuring point

从图 3 可以看出,小球冲击 A 点后,膜表面产生振动变形。而 B、C、D 点产生的振幅均比 A 点小。B、C 两点由于处在位置的曲率不同,两点各自的振幅以及周期有一定差异。D 点是由正向的小振幅开始的有阻尼自由振动,这与其他三点有所差别,这是由于振动波形传递时,波的干涉因各向异性以及预张力的不同导致 D 点为正向小振幅。

(a) 一阶 t=0.002 s

(b) 二阶 t=0.002 s

(c) 三阶 t=0.002 s

(d) 前三阶叠加 t=0.002 s

图 4　各阶振型以及前三阶叠加振型

Fig. 4　Vibration modes of each order and the first three superposition modes

3.2　鞍形膜面振型

将材料和几何参数代入式(19),为获得较为明显的振型,取小球质量为 $M = 25 \times 10^{-2}$ kg。可以得到各阶的振型,也可以得到各阶的叠加振型。振型如图 4 所示,坐标尺寸为 m。

从以上振型结果可以看出,利用鞍形膜曲面函数式(19)可以方便地计算出鞍形膜结构在冲击载荷作用下的各阶振型以及总叠加振型。振动幅值随振动阶数的增加而减小,即低阶振型的影响大于高阶振型。

4　数值模拟

鞍形膜结构在冲击载荷作用下的动力响应数值分析是典型的预张力结构瞬态分析问题。针对这类问题,本研究利用了通用显示动力学有限元分析软件 ANSYS/LS-DYNA 对冲击载荷作用下鞍形膜结构振动进行了模拟[15],并与理论结果进行对比分析。

求解方法采用隐式-显式连续解。在隐式计算中,膜采用了 Shell181 单元,小球采用了 Solid185 单元。而在显式动态分析时,将隐式分析中的相应单元转换为 Shell163 单元、Solid164 单元。网格划分中,采用了映射三角形单元来生成膜表面,映射六面体实体单元来生成小球的网格,冲击点膜面网格大小为 0.25 cm,小球网格大小为 1 cm,网格划分效果如图 5。而数值模拟与理论取相同材料参数,见表 1。

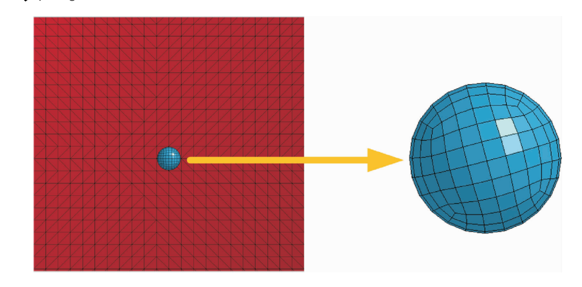


图 5　小球单元与膜单元网格划分

Fig. 5　Mesh division of small ball element and membrane element

对于小球冲击膜面的速度差值的模拟,通过在显示分析关键字选项中,设置 Solid164 单元 Z 方向的不同初速度,进行 LS-DYNA 求解,然后在 LS-PrePost 后处理程序中查看 Solid164 单元的速度时程曲线,得到不同初速度下的速度差值。这样,设置不同

的初速度以满足速度差,达到对小球冲击膜面速度差值模拟。因此,不同速度差所对应小球的模拟初速度以及弹出膜面的反弹速度见表 2。

表 1　材料属性

Tab. 1　The material properties

单元类型	厚度 h/m	密度 ρ/($kg \cdot m^{-3}$)	弹性模量 E_x/MPa	弹性模量 E_y/MPa	泊松比 NUXY
SHELL41	0.001	1 700	1 400	900	0.34
SOLID185	–	900	53	53	0.3

表 2　同速度差所对应的模拟速度

Tab. 2　Simulation speed corresponding to different velocity differences

速度	速度差/($m \cdot s^{-1}$)				
	38	39	40.7	42	43
对应初速度/($m \cdot s^{-1}$)	35.1	36.7	37.18	38.7	39.5
对应反射速度/($m \cdot s^{-1}$)	3.0	3.2	3.6	3.9	3.9

5　理论与模拟对比分析

鞍形膜结构在冲击载荷作用下的位移可能超过其变形能力,进而导致膜表面产生褶皱和撕裂。因此,位移被视为振动分析和动态设计的重要参数。本节详细讨论了预张力、拱跨比、冲击载荷速度差等变量对位移结果的影响。参数取 $a = b = 1$ m,$E_x = 1\,400$ MPa, $E_y = 900$ MPa, $\rho = 1.7$ kg/m^2, $h = 0.001$ m, $C = 120$ N·s/m, $M = 0.25 \times 10^3$ kg。

5.1　预张力对位移最大值的影响

选取预张力分别为 5、6、7、8、9、10 kN/m;拱跨比与速度差均值取 $f_x = f_y = 0.1$, $\delta(v) = 40.7$ m/s;计算出所选预张力的鞍形膜在振动时产生的最大位移,结果见表 3 和图 6。

表 3　不同预张力下的最大位移比较

Tab. 3　Comparison of the value of maximum displacement under different pretension

结果	预张力/kN					
	5	6	7	8	9	10
理论结果/mm	9.94	9.64	9.35	9.07	8.79	8.52
数值结果/mm	9.35	9.11	8.86	8.74	8.65	8.39
相对差/%	5.94	5.50	5.24	3.42	1.59	1.56

从表 3 和图 6 可以看出,随着预张力的增加,位移值呈下降趋势,预张力从 5 kN/m 到 10 kN/m 之间,膜面位移理论解减少 14%,而数值解减少 10%。这表明预张力的变化对鞍形膜结构抵抗振动变形有明显的影响,能为膜面提供一定抵抗变形的刚度,所以这对膜结构设计来说是一项重要参数。同时,理论结果和数值结果之间的相对差逐渐降低,最大相对差达 5.94%,表明预张力变化对鞍形膜结构振动的影响,在数值解与理论解上的变化是吻合的。

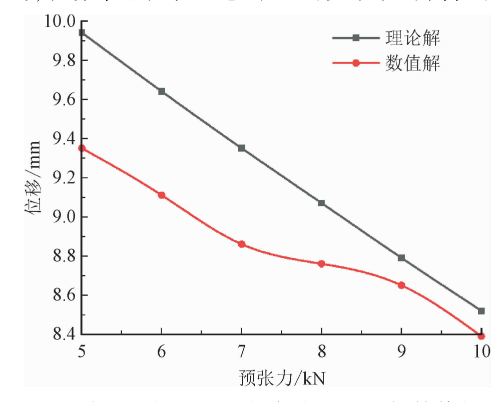


图 6　不同预张力下的最大位移理论解与数值解对比

Fig. 6　Comparison between theoretical solution and numerical solution of maximum displacement under different pretension

5.2　拱跨比对最大位移的影响

选取拱跨比分别为 1/15、1/14、1/13、1/12、1/11、1/10;而预张力与速度差取 $N_{0x} = N_{0y} = 10$ kN/m, $\delta(v) = 40.7$ m/s。计算出不同拱跨比的鞍形膜在振动时产生的最大位移,结果见表 4 和图 7。

表 4　不同拱跨比下的最大位移比较

Tab. 4　Comparison of the value of maximum displacement under different arch-span ratios

结果	拱跨比					
	1/15	1/14	1/13	1/12	1/11	1/10
理论结果/mm	9.30	9.21	9.09	8.94	8.75	8.52
数值结果/mm	9.00	8.97	8.90	8.79	8.63	8.39
相对差/%	3.23	2.60	2.09	1.68	1.37	1.52

从表 4 和图 7 可以看出,随着拱跨比的增大,位移逐渐减小,拱跨比从 1/15 增加到 1/10,膜面位移理论解减少了 8.4%,而数值解减少了 6.8%。这表明拱跨比与预张力一样对膜面抵抗变形的能力有一定的影响,由于膜面拱跨比的增加,使膜面形成了更大的拱状传力路径,为膜面抵消了更多部分冲击力,因此拱跨比能提高膜面承载力、增强膜面抵抗变形的性能。同时,理论结果与数值结果之间的相对差随拱跨比的增大而减小,整体趋势相一致,最小相对

差为 1.52%，最大为 3.23%，符合误差范围内，表明了理论解的可行性。

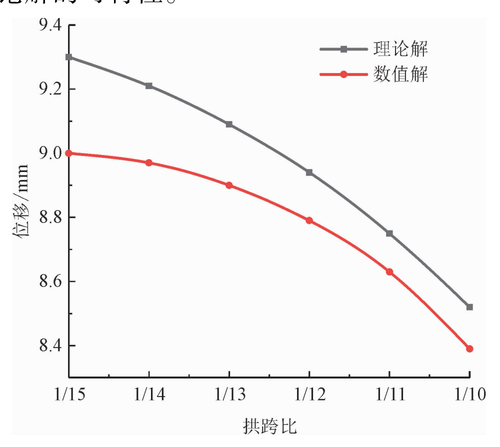


图 7 不同拱跨比下的最大位移理论解与数值解对比

Fig. 7 Comparison of theoretical and numerical solutions of maximum displacement under different arch-span ratios

5.3 速度差对最大位移的影响

预张力以及拱跨比取：$N_{0x}=N_{0y}=10$ kN/m，$f_x=f_y=0.1$。选取表 1 得到的不同速度差值与对应的模拟初速度，可计算出在不同速度差作用下的鞍形膜最大位移，结果见表 5 和图 8。

表 5 不同速度差下的最大位移比较

Tab. 5 Comparison of the maximum displacement under different velocity differences

结果	速度差/(m·s^{-1})				
	38	39	40.7	42	43
理论结果/mm	7.96	8.16	8.52	8.79	9.00
数值结果/mm	7.61	7.98	8.39	8.39	8.71
相对差/%	4.40	2.21	1.53	0.91	0.44

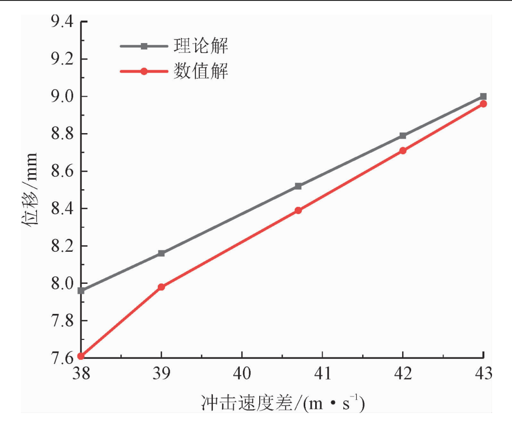


图 8 不同速度差的最大位移理论解与数值解对比

Fig. 8 Comparison between theoretical solution and numerical solution of maximum displacement value for different velocity differences

从表 5 和图 8 可以看出，随着速度差的增加，产生的最大位移也呈增长的趋势，这反映了冲击所带来的能量越大，薄膜耗散该能量所需要的变形也越大；表明了冲击载荷对薄膜结构影响是巨大的，能使膜面产生较大的变形。而理论结果和数值结果变化规律一致，相对差随着速度差的增加而降低，最大差值仅 4.4%。

6 结 论

本研究利用小球速度差模拟得到冲击载荷，通过随机摄动法求解得到了鞍形膜结构振动的位移函数，并结合算例分析与数值模拟的对比分析，得到以下结论。

1）本研究基于随机摄动法求解鞍形膜结构振动非线性微分方程，可以得到理论解解析，该理论解得能够预测鞍形膜在冲击载荷作用下的瞬态特性，得到与数值模拟较吻合的结果，说明本研究的理论模型可以作为求解曲面膜结构振动问题的一种有效方法。

2）冲击产生的位移随预张力和拱跨比的增加呈非线性下降，但随着小球速度差的增加而增加，而预张力对随机振动结果的影响相对较大，这揭示了鞍形膜结构振动的瞬态响应的基本规律。

3）冲击载荷造成的薄膜变形是很明显的，荷载作用带来的动能需要薄膜产生较大的变形来耗散，严重的冲击会造成薄膜撕裂破坏。

膜结构在自然环境中所承受的风、暴雨和冰雹作用具有冲击荷载性质。为保证膜结构的安全性、耐久性、适用性，在膜结构的设计时，应设计合适的预张力与拱跨比，提供足够抗冲击变形能力。同时还应结合随机概率统计与可靠度理论，进行膜结构在冲击荷载作用下的随机动力可靠度的进一步研究，使膜结构的设计理论更加合理，以减少或防止膜结构工程事故的发生。

参考文献：

[1] LIU C J, WANG F, DENG X W, et al. Hailstone-induced dynamic responses of pretensioned umbrella membrane structure[J]. Advances in structural engineering, 2021, 24(1): 3-16.

[2] 张华，周星德，单建. 薄膜结构的几何非线性分析[J]. 应用力学学报, 2004, 21(2): 106-109.

ZHANG Hua, ZHOU Xingde, SHAN Jian. Geometrically nonlinear analysis of membrane structures[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2004, 21(2): 106-109 (in Chinese).

[3] LIU C J, ZHENG Z L, YANG X Y, et al. Nonlinear damped vibration of pre-stressed orthotropic membrane structure under impact loading[J]. International journal of structural stability and dynamics, 2014, 14(1): 1350055.

[4] LIU C J, ZHENG Z L, YANG X Y. Analytical and numerical studies on the nonlinear dynamic response of orthotropic membranes under impact load[J]. Earthquake engineering and engineering vibration, 2016, 15(4): 657-672.

[5] ZHENG Z L, LU F M, HE X T, et al. Large displacement analysis of rectangular orthotropic membranes under stochastic impact loading[J]. International journal of structural stability and dynamics, 2016, 16(1): 1640007.

[6] LI D, ZHENG Z L, TIAN Y, et al. Stochastic nonlinear vibration and reliability of orthotropic membrane structure under impact load [J]. Thin-walled structures, 2017, 119: 247-255.

[7] LI D, ZHENG Z L, YANG R, et al. Analytical solutions for stochastic vibration of orthotropic membrane under random impact load [J]. Materials, 2018, 11(7): 1231.

[8] 郭学敏，朱平. 多层薄膜热应力模拟[J]. 应用力学学报，2020，37(2): 743-749, 940.
GUO Xuemin, ZHU Ping. Calculation and simulation of thermal stress of multilayer films[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2020, 37(2): 743-749, 940 (in Chinese).

[9] XU Y P, ZHENG Z L, LIU C J, et al. Aerodynamic stability analysis of geometrically nonlinear orthotropic membrane structure with hyperbolic paraboloid[J]. Journal of engineering mechanics, 2011, 137(11): 759-768.

[10] LIU C J, DENG X W, ZHENG Z L. Nonlinear wind-induced aerodynamic stability of orthotropic saddle membrane structures[J]. Journal of wind engineering and industrial aerodynamics, 2017, 164: 119-127.

[11] 孙芳锦，徐中豪，张敏. 风与柔性结构流固耦合作用的预处理方法研究[J]. 应用力学学报，2020，37(2): 846-850.
SUN Fangjin, XU Zhonghao, ZHANG Min. Study on pre-treatment method of fluid-solid coupling of wind and flexible structures[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2020, 37(2): 846-850 (in Chinese).

[12] LI D, ZHENG Z L, LIU C Y, et al. Dynamic response of rectangular prestressed membrane subjected to uniform impact load [J]. Archives of civil and mechanical engineering, 2017, 17(3): 586-598.

[13] CAUGHEY T K. Nonlinear theory of random vibrations [J]. Advances in applied mechanics, 1971, 11: 209-253.

[14] CRANDALL S H. Introduction to the mechanics of solids[M]. New York: McGraw-Hill Education, 1978.

[15] LIU C J, WANG F, LIU J, et al. Theoretical and numerical studies on damped nonlinear vibration of orthotropic saddle membrane structures excited by hailstone impact load[J]. Shock and vibration, 2019, 2019: 9234832.

（编辑　李坤璐）